

## **IL N'Y A PAS QUE $j\omega$**

J.-P. DIARD, B. LE GORREC, C. MONTELLA

*Ecole Nationale Supérieure d'Electrochimie  
et d'Electrometallurgie de Grenoble,  
Centre de Recherche en Electrochimie Minérale  
et en Génie des Procédés,  
U.A. C.N.R.S. 1212, Domaine Universitaire - B.P. 75  
38402 Saint Martin d'Hères (France)*

### **Résumé**

Les fonctions de transfert  $H(p)$ , donc les impédances électrochimiques, sont des fonctions complexes de la variable complexe  $p = \sigma + j\omega$ . Quatre dimensions sont nécessaires pour tracer le graphe d'une fonction complexe d'une variable complexe. On présente plusieurs représentations graphiques de ces fonctions. Ces représentations peuvent servir, par exemple, à mettre en évidence la position des pôles et zéros des fonctions de transfert.

### Introduction

Les fonctions de transfert  $H(p)$ , donc les impédances électrochimiques  $Z(p)$ , sont définies comme le rapport des transformées de Laplace de deux signaux selon

$$H(p) = \text{TL}[s(t)] / \text{TL}[e(t)]$$

où TL indique la transformation de Laplace définie selon

$$\text{TL}[f(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-p t) f(t) dt$$

avec  $p = \sigma + j\omega$ . Les fonctions de transfert sont donc des fonctions complexes de la variable complexe  $p = \sigma + j\omega$  (Fig. 1).

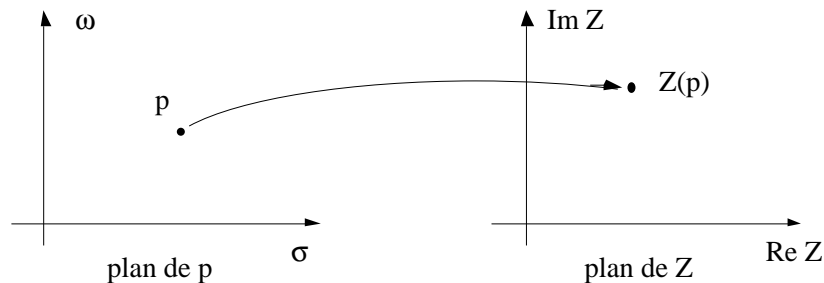


Fig. 1: Plan de  $p$  et plan de  $Z$ .

Quatre dimensions sont nécessaires pour tracer le graphe d'une fonction complexe d'une variable complexe. Seul  $H(j\omega)$  est déterminé par Spectroscopie d'Impédance, seul  $H(\sigma)$  l'est par Impédance Opérationnelle Réelle.

### Transformations conformes

Afin de se soustraire à la nécessité de disposer de quatre dimensions on peut visualiser la façon dont la fonction étudiée transforme un ensemble de droites du plan de  $p$ . Chaque droite du plan de  $p$  est transformée en une courbe dans le plan de  $Z$ , courbe qui peut être représentée à l'aide de deux dimensions<sup>1,2</sup>. Ainsi pour la fonction de transfert du premier ordre

$$Z(p) = 1 / (1 + p)$$

chaque droite du maillage cartésien (Fig. 2) est transformé dans le plan de  $Z$  en un demi cercle. La demi droite imaginaire  $\omega \geq 0$  est transformée en un demi-cercle, graphe classique de  $Z(j\omega)$ . Les graphes des figures 2 et 3 sont tracés à l'aide de la procédure CartesianMap du logiciel Mathematica<sup>3</sup>.

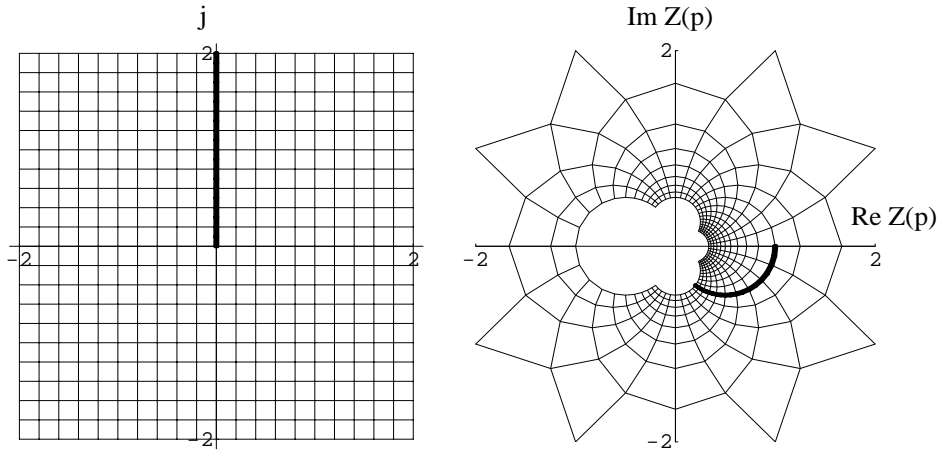


Fig. 2: Grille cartésienne et image de cette grille par l'impédance du premier ordre  $Z(p) = 1 / (1 + p)$  (traits fins), axe imaginaire et image de cet axe (traits épais).

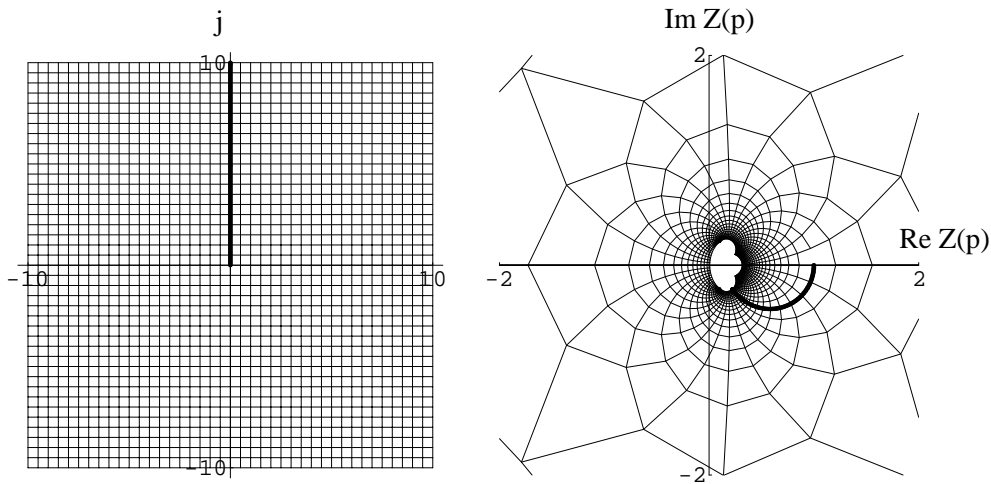


Fig. 3: Grille cartésienne et image de cette grille par l'impédance de diffusion convection  $Z(p) = th\sqrt{p} / \sqrt{p}$  (traits fins), axe imaginaire et image de cet axe (traits épais).

### Représentations 3D

Il est possible de présenter en trois dimensions l'évolution du module, ou de la phase d'une impédance, lorsque  $\sigma$  et  $\omega$  varient. La figure 4 qui présente l'évolution du module de l'impédance du premier ordre met en évidence la présence du pôle réel de l'impédance, valeur de  $p$  pour laquelle son module devient infini. La figure 5 qui présente l'évolution du module de l'impédance de diffusion convection met en évidence l'élégant entrelacement des pôles et des zéros réels de cette impédance. Le module de l'impédance est nul pour les valeurs de  $p$  égales à ses zéros. Les figures 4 et 5 sont tracées à l'aide la procédure Plot3D du logiciel Mathematica.

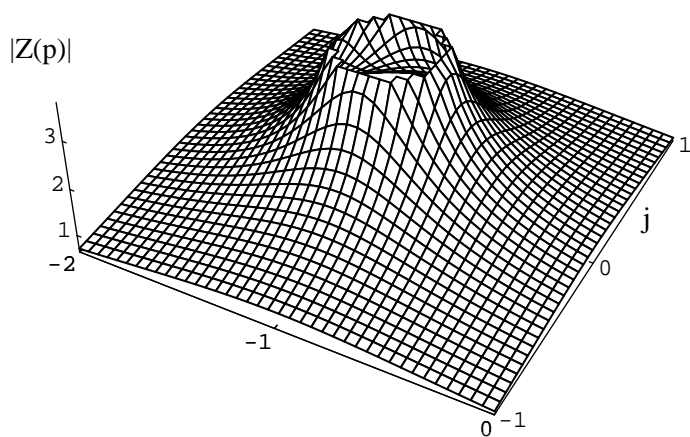


Fig. 4: Graphe 3D de  $|1 / (1 + p)|$ .

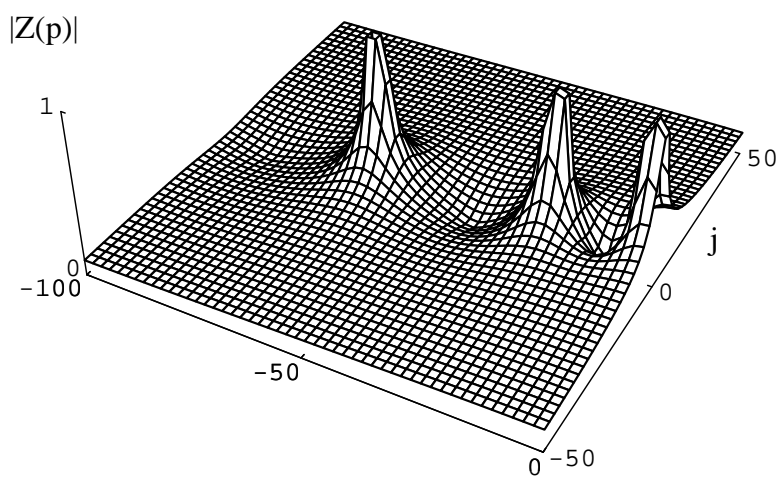


Fig. 5: Graphe 3D de  $|th\sqrt{p} / \sqrt{p}|$ .

### Courbes de niveaux

On peut ramener les représentations 3D à deux dimensions en traçant les courbes de niveaux du module de l'impédance. La figure 6 présente les courbes de niveau du module de l'impédance du premier ordre et son pôle, valeur de  $p$  qui annule son dénominateur.

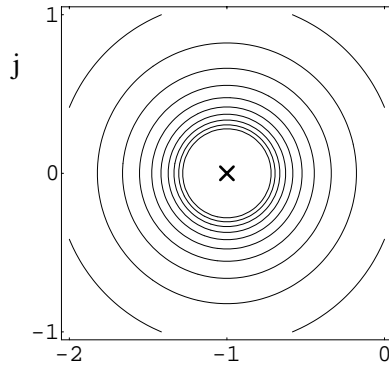


Fig. 6: Courbes de niveaux de  $|1/(1+p)|$ ; croix: pôle.

La figure 7 présente les courbes de niveaux du module de l'impédance de diffusion convection. Sur la même figure sont indiqués les pôles et les zéros, zéros qui sont les valeurs de  $p$  qui annulent son numérateur, de l'impédance calculés à l'aide de son développement infini <sup>4</sup>:

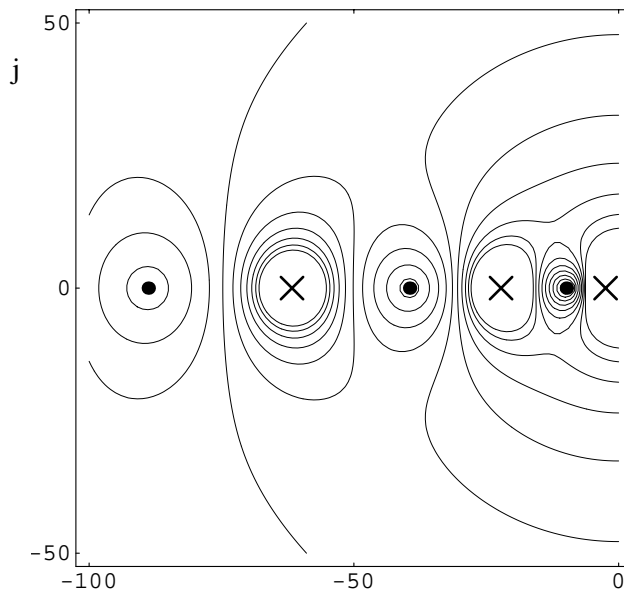


Fig. 7: Courbes de niveaux de  $|th\sqrt{p}/\sqrt{p}|$ ; croix: pôles, disques: zéros.

$$\operatorname{th}\sqrt{p} / \sqrt{p} = \frac{1}{1 + (4p / \pi^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + [p / (k \pi)^2]}{1 + \{4p / [(2k+1) \pi]^2\}}$$

Les figures 6 et 7 sont tracées à l'aide de la procédure ContourPlot du logiciel Mathematica.

### Conclusion

Les possibilités graphiques de logiciels tels que Mathematica peuvent être mises à profit pour tracer des graphes d'impédances en fonction de la variable complexe  $p$ . Il est ainsi possible, par exemple, de tracer numériquement la carte des pôles et des zéros de l'impédance, carte qui peut servir à étudier la stabilité de l'impédance selon son mode de commande<sup>5</sup>.

### Références

- [1] Dynamique de la Commande Linéaire, J.-Ch. Gille, P. Decaulne, M. Pélegrin, Dunod, Paris, 1991.
- [2] Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer, S. Wolfram, Addison-Wesley, Redwood City, 1988.
- [3] Programming in Mathematica, R. Maeder, Addison-Wesley, Redwood City, 1990.
- [4] The Mathematics of Diffusion, p. 23, J. Crank, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [5] Isothermes d'adsorption, impédance et stabilité, F. Berthier, J.-P. Diard, C. Montella, ce Forum.